

國立宜蘭大學 105 年度第一次微積分競試 試題

※注意事項※

1. 考試時間為 100 分鐘(13:10-14:50)，考試開始 10 分鐘後不得入場，考試期間不得離開考場；考試期間亦禁止使用字典、計算機、及任何通訊器材。
2. 本試題共計 21 題，總分為 100.7 分。
3. 各題答案請依題號填入答案卷上相對應題號的空格內，填錯格或填在格外者不予計分，字跡切勿潦草，答錯或未作答者，不給分亦不倒扣。
3. 請將您的班級、學號及姓名，用正楷填寫於答案卷上方的欄位內。
4. 考試結束時，請將答案卷繳回即可，本試題不必繳回。
5. 14:00 後才能提早交卷。

祝考試順利!!!

第 1 題每格 2 分

1. Evaluate the limit of the following functions if it exists.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} 3x \csc 2x$ (b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 1}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x(1 - 2 \cos x)}{x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 - \cos 2x)^2}{x^4}$ (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 3}{3x^2 + 1}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 3x}{\sin 2x}$ (h) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6}}{3}$

2-8 題每格 3 分

2. Find the derivative for the function $y = e^{2x} \tan 2x$.

3. Find the derivative for the function $y = \frac{(x-2)^3}{\sqrt{x^2+1}}$.

4. Find the tangent line of the function $y = \frac{x}{x+4}$ that pass through the point $(-4, 9)$.

5. Find the maximum value of the function $f(x) = x + 2 \sin x$, $x \in [0, \pi]$.

6. Find the relative(local) maximum value of the function $f(x) = \frac{1}{x} + x$.

7. Evaluate the slope m for the tangent line of the function

$$(x^2 + y^2)^2 = 4x^2y \quad \text{at the point } (1, 1).$$

8. Write the first three terms in Maclaurin series for the function $\frac{\sin x}{x}$.

9-15 題每格 4 分

9. Find all the horizontal, vertical, oblique asymptotes of $y = \frac{5x^2 + 3x + 2}{x - 3}$.

10. Evaluate $\int \frac{xe^{2x}}{(2x+1)^2} dx$.

11. Evaluate $\int_0^1 (1 - \sqrt{x})^{50} dx$.

12. Evaluate the improper integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{(3x+1)^2} dx$.

13. 求 $y = x^2$ 曲線上，距離點(6,3)最近的點。

14. 求函數在給定區間的弧長。 $y = \ln(\cos x)$, $[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}]$.

15. 求 $y = 4x - x^2$ 與 $y = 8x - 2x^2$ 所圍區域面積繞 $x = -2$ 所得之旋轉體體積。

16-21 題每格 5.1 分

16. Evaluate $\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}} dx$.

17. Find the curvature for the helix

$$\vec{r}(t) = (a \cos t)\vec{i} + (a \sin t)\vec{j} + bt\vec{k}, \quad a, b \geq 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

18. 假設加熱板的溫度分布函數為 $T(x, y) = x^2 + y^3$ ，一隻小蟲以

$$x = \sqrt{1+t}, y = 2 + \frac{1}{3}t, \text{ 其中 } x(m)、y(m)、t(\text{sec}), \text{ 之路徑爬行。}$$

3秒鐘後抵達 P 點，請推算此時小蟲感受到的溫度變化率 (18a)

($^{\circ}\text{C}/\text{sec}$)，若想脫離此路徑，朝哪個方向移動溫度會降得最多？

(18b)

19. 已知三角形 ABC 之 \overline{AB} 邊以 3 cm/s 之變率增長， \overline{AC} 邊則以 2 cm/s

之變率縮減。在面積不變之前提下，當 $\overline{AB} = 20 \text{ cm}$ 、 $\overline{AC} = 30 \text{ cm}$ 、

$\angle A = 30^{\circ}$ 時， $\angle A$ 之變率(rad/s)為何？

20. Evaluate $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$.

21. Evaluate $\iint_R \sin(x^2 + y^2) dA$, where R is the region in the first quadrant

enclosed by the circle $x^2 + y^2 = 4$ and the lines $y = 0$ and $y = x$.