

# 國立宜蘭大學 110 年度微積分競試 試題

## ※注意事項※

1. 考試時間為 100 分鐘(13:10-14:50)，考試開始 10 分鐘後不得入場，考試期間不得離開考場；考試期間亦禁止使用字典、計算機及任何通訊器材。
2. 本試題共計 22 題，總分為 102.6 分。
3. 各題答案請依題號填入答案卷上相對應題號的空格內，填錯格或填在格外者不予計分，字跡切勿潦草，答錯或未作答者，不給分亦不倒扣。
4. 請將您的班級、學號及姓名，用正楷填寫於答案卷上方的欄位內。
5. 考試結束時，請將答案卷繳回即可，本試題不必繳回。
6. 14:00 後才能提早交卷。

祝金榜題名!!!

1-8 題每題 4 分

1. Test the series for convergence or divergence.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})\pi}{1+\sqrt{n}}$

2. Test the series for convergence or divergence.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n+1}{ne^{n+1}}$

3. Find the Maclaurin series for  $f(x) = \cos(x^2)$ .

4. Evaluate the gradient at the point  $P$ .  $f(x, y, z) = xe^{2yz}$ ,  $P(3, 0, 2)$

5. Find  $f(1)$  if  $f(x) = \frac{3}{2x + \frac{3}{2x + \frac{3}{2x + \dots}}}$

Find the limit of the following function if it exists. Otherwise, fill the blank with “X”, if the limit does not exist.

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x(x-3)} - \sqrt{x(x+3)}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\frac{1}{1-x}}$

8.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

**9-16 題每題 5 分**

9. Find the derivative of the function.  $f(\theta) = \cos(\theta^2)$

10. Differentiate  $\frac{8x}{1-\cot x}$

11. Find  $y'$  by implicit differentiation.  $x^2 - 8xy + y^2 = 8$

12. 針對函數  $f(x, y) = x \tan y$ 。求出位於點  $\left(2, \frac{\pi}{4}\right)$  方向導函數(directional derivative)之最大值。

13. Evaluate  $\int \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx$

14. Evaluate  $\int \frac{2^{2x} + 2^{-2x}}{2^{2x} - 2^{-2x}} dx$

15. Evaluate  $\int a^x b^x dx$

16.  $f'(x) = \frac{dy}{dx} = x^2 \ln x$ ，求  $y = F(x)$

17-22 題每題 5.1 分

17. 在條件  $2x - 3y - 4z = 49$  限制下，找出函數  $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$  的極小值。

18.  $w = x^2y - y^2$ ，變數關係為  $x = \sin t$ ， $y = e^t$ 。求  $\frac{dw}{dt}$

19. Calculate  $\int_0^2 \frac{1}{1+x^3} dx$  by following methods: Express  $\frac{1}{1+x^3}$  as a power series from the known equation  $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ , then calculate four terms of the definite integral.

20. Consider the function  $f(x, y) = (e^x - x) \cos y$ . Suppose  $S$  is the surface  $z = f(x, y)$ . Find a vector which is perpendicular to the level curve of  $f$  through the point  $(2, 6)$  in the direction in which  $f$  decreases most rapidly.

21.  $\int_0^1 \int_{2x}^2 4e^{y^2} dy dx =$

22. Let  $\vec{F} = (6a^2x + 4ay^2)\vec{i} + (4z^3 - ay)\vec{j} - (z + 4x^2 + 4y^2)\vec{k}$

Find the value(s) of  $a$  making  $\text{div}\vec{F} = 0$ ,  $a=?$